ЭКОНОМИКА
И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

1965
том I, вып. 4

ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХУРОЧНЫХ ЧАСОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СЕЗОННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

В. И. ШЕМБЕЛЬ

(МОСКВА)

В настоящей работе рассматривается задача минимизации числа сезонных рабочих за счет использования сверхурочных часов.

Работа состоит из четырех разделов. В первом разделе дается технико-экономический анализ задачи и устанавливаются содержательные критерии оптимальности. Во втором строится экономико-математическая модель в виде иерархии однотипных задач целочисленного программирования со строго формализованным переходом между последовательными задачами. Затем, предполагая каждую задачу иерархии решенной, строим алгоритм решения всей модели. В третьем и четвертом разделах рассматривается задача, обобщающая каждую задачу иерархии, и на основе устанавливаемого там критерия строятся алгоритмы решения обобщенной задачи.

1. АНАЛИЗ И ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ *

Мы предполагаем известными объем работ в часах, а также числа выходов (фактических рабочих дней, зависящих от погоды) в каждом месяце и число постоянных рабочих предприятия.

Известно также, что на сезонных предприятиях допускается использование сверхурочных часов, которыми могут быть загружены только постоянные рабочие. При этом лимитируется максимальное число сверхурочных часов на каждого постоянного рабочего соответственно в день, месяц и год. Например, в совхозах Грузинской ССР каждый постоянный рабочий может работать сверхурочно соответственно не более двух часов в день, 40 час. в месяц и 120 час. в год.

Введем обозначения: p — число постоянных рабочих предприятия; P_i — объем работ, подлежащих выполнению в i-м месяце, $(1 \leqslant i \leqslant 12)$; a_i — число выходов в i-м месяце $(1 \leqslant i \leqslant 12)$; n — число часов в рабочем дне; m — однодневный лимит сверхурочных на каждого постоянного рабочего предприятия; $M_{\text{мес}}$ — месячный лимит сверхурочных на каждого постоянного рабочего; $M_{\text{год}}$ — годовой лимит сверхурочных часов на каждого постоянного рабочего.

В дальнейшем под выражениями «месячный лимит» и «годовой лимит» мы понимаем соответственно числа: $M_{\text{мес}} \cdot p$, $M_{\text{год}} \cdot p$, т. е. лимиты на весь контингент постоянных рабочих.

Обозначим через i_k — номера тех месяцев, в которые число рабочих, необходимых предприятию, превосходит число постоянных рабочих, т. е. $P_{i_k} / na_{i_k} > p$.

---

* Задача была предложена Отделом проектирования совхозов государственного проектного института Грузгипропищепром Госкомитета по пищевой промышленности при Госплане СССР. Первый практический расчет проведен в ноябре 1964 г. в ВЦ АН ГрузССР при участии сотрудников названного отдела.

Назовем эти месяцы пиковыми. Так как необходимость в использовании сверхурочных часов наступает лишь во время пиковых месяцев, то в дальнейшем мы рассматриваем только таковые, что позволяет для простоты опускать двойные индексы и писать вместо i_k просто k.

Обозначим через s число пиковых месяцев $(1 \leqslant s \leqslant 12)$.

При использовании сезонных рабочих (привлекаемых со стороны) основным вопросом является организация их питания и жилья. Очевидно, что при расчетах связанных с этим затрат надо исходить из тех месяцев, в которых число сезонников (привлекаемых со стороны рабочих) максимально. Следовательно, прежде всего необходимо найти такой план распределения сверхурочных часов по пиковым месяцам, при котором соблюдены соответствующие лимиты и достигается минимакс числа сезонников.

Если после того как такой план найден и выполнен, окажется, что в некоторые месяцы еще есть возможность уменьшить число сезонников за счет неиспользованной части лимитов сверхурочных часов, то надо попытаться в максимально возможное количество месяцев добиться наибольшего уменьшения числа сезонников*. Это опять сводится, очевидно, к обеспечению минимакса числа сезонников на некоторой частичной совокупности пиковых месяцев. Этот процесс необходимо повторять до тех пор, пока не окажется, что ни в одном месяце уменьшение числа сезонников хоть на одного рабочего за счет сверхурочных часов уже невозможно.

Задача, очевидно, должна решаться как целочисленная по отношению к переменным, выражающим число сезонников. Тем более, что первые расчеты показали: разница между целочисленным и обычным (с последующим округлением) решениями составила в отдельные месяцы четыре-пять рабочих, а это уже значительная величина как в плане затрат на организацию их питания и жилья, так и в плане наличия в данном месяце нужного числа сезонных рабочих.

2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. ОСНОВНОЙ АЛГОРИТМ

Обозначим число сезонников в k-м месяце через x_k, а число сверхурочных часов, используемых в этом месяце, y_k.

Тогда

$$na_k(p + x_k) + y_k = P_k \quad (k = 1, \ldots, s). \tag{1}$$

Так как в день число сверхурочных часов не должно превышать mp, то в k-м месяце оно будет не более mpa_k, соответственно число сверхурочных часов, используемых в каждом месяце, не должно превышать $M_{\text{мес}} \cdot p$, а в году $M_{\text{год}} \cdot p$, т. е. получаем соотношения:

$$y_k \leqslant mpa_k, \quad y_k \leqslant M_{\text{мес}} \cdot p \quad (k = 1, \ldots, s), \quad \sum_{k=1}^{s} y \leqslant M_{\text{год}} \cdot p,$$

которые введением обозначений

$$M_k = \min\,(ma_k, M_{\text{мес}}) \cdot p \quad (k = 1, \ldots, s), \; M = M_{\text{год}} \cdot p$$

приводятся к виду

$$y_k \leqslant M_k \; (k = 1, \ldots, s); \; \sum_{k=1}^{s} y_k \leqslant M; \tag{2}$$

имеют место также

$$x_k \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, s). \tag{3}$$

---

* Это диктуется тем, что каждого сезонника в том или ином месяце надо еще найти.

Целочисленный вектор $X = (x_1, \ldots, x_s)$, компоненты которого удовлетворяют ограничениям (1), (2) и (3), назовем целочисленным планом, а вектор $Y = (y_1, \ldots, y_s)$ соответствующих y_k — планом сверхурочных часов.

Целочисленный план, дающий решение рассматриваемой задачи, назовем главным целочисленным планом и обозначим через $X^* = (x_1^*, \ldots, x_s^*)$.

Целочисленный план $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_s^1)$, минимизирующий функционал $f_0(X) = \max\limits_k x_k$, назовем первым оптимальным планом, а соответствующий ему вектор $Y^1 = (y_1^1, \ldots, y_s^1)$ — первым планом сверхурочных.

$$\text{Если } R_1 = \left\{ k \,/\, y_k^1 + na_k \leqslant M_k;\ \ \sum_{k'=1}^{s} y_{k'}^1 + na_k \leqslant M \right\} = \varnothing,$$

то $X^* = X^1$ и модель построена.

Действительно, множество R_1 соответствует совокупности тех месяцев, в каждом из которых за счет сверхурочных часов число сезонников может быть уменьшено хоть на единицу. Значит, если R_1 пусто, то ни в одном месяце невозможно уменьшить число сезонников и найденный первый оптимальный целочисленный план решает задачу.

Пусть, однако, имеем $R_1 \neq \varnothing$.

В этом случае, как указано выше, надо найти максимально длинный период, на котором возможно уменьшить число сезонников, а среди последних тот, на котором можно уменьшить число сезонников (за счет данного количества сверхурочных часов) на максимальное число единиц.

С этой целью строим множество

$$R_1^1 = \left\{ k \,/\, k \in R_1;\ x_k^1 = \max_{k' \in R_1} x_{k'}^1 \right\},$$

соответствующее, очевидно, совокупности тех месяцев из R_1, для которых число сезонников максимально, т. е. с которых фактически надо начинать уменьшение их числа.

Рассмотрим подмножества $\tau_1 \subseteq R_1$, для которых

$$\sum_{k=1}^{s} y_k^1 + n \sum_{k \in \tau_1} a_k \leqslant M.$$

Очевидно, τ_1 соответствует каждой такой совокупности месяцев, в которые можно одновременно уменьшить число сезонников хоть на единицу. Пусть $\beta(\tau_1)$ — число элементов τ_1, а τ_1^1 — такое τ_1, которое максимизирует $\beta(\tau_1)$, т. е. имеет место $\beta(\tau_1^1) \geqslant \beta(\tau_1)$.

Через R_1^2 обозначаем то из τ_1^1, которое минимизирует функцию

$$\gamma(\tau_1^1) = \sum_{k \in \tau_1^1} a_k,$$

т. е. имеем $\gamma(R_1^2) \leqslant \gamma(\tau_1^1)$.

Максимальность $\beta(\tau_1^1)$ означает, что длина периода (число месяцев), соответствующего τ_1^1, максимальна. Минимальность $\gamma(R_1^2)$ говорит о том, что сумма человеко-часов на одного рабочего на этом периоде, т. е. число $n \sum\limits_{k \in R_1^2} a_k$, минимальна среди аналогичных сумм на каждом τ_1^1; значит, за счет данного количества сверхурочных часов на совокупности месяцев, соответствующей R_1^2, по сравнению с остальными τ_1^1 может быть заменено максимальное число рабочих, т. е. число сезонников может быть уменьшено на наибольшее число единиц.

Наконец, строим множество $Q_1 = R_1^2 \cup (R_1 \setminus R_1^1)$, т. е. к последней совокупности месяцев присоединяем те, в которые числа сезонников не максимальны, а соответствующие $k \in R_1$.

Множество Q_1 характеризует, очевидно, тот самый период, на котором необходимо осуществить дальнейшее уменьшение числа сезонников. При $k \in Q_0 \setminus Q_1 = R_1^3$, где $Q_0 = \{1, \ldots, s\}$, числа сезонников не изменятся, т. е. равны x_k^1; следовательно, имеем $x_k^* = x_k^1$, $k \in R_1^3$.

Подставим теперь в (1), (2) и (3) значения $x_k = x_k^1$, $y_k = y_k^1$, $k \in R_1^3$ и выпишем те из этих соотношений, которые после указанной подстановки содержат переменные. Получим

$$na_k(p + x_k) + y_k = P_k, \quad k \in Q_1, \tag{4}$$

$$y_k \leqslant M_k, \quad k \in Q_1, \quad \sum_{k \in Q_1} y_k + \sum_{k \in R_1^3} y_k^1 \leqslant M, \tag{5}$$

$$x_k \geqslant 0, \quad y_k \geqslant 0, \quad k \in Q_1. \tag{6}$$

Так как наша цель состоит в дальнейшем уменьшении x_k на Q_1, то ограничения необходимо дополнить следующим:

$$x_k \leqslant x_k^1. \tag{7}$$

Заметим, что из (1) и (3) следует также $x_k \leqslant (P_k / na_k) - p$, и так как x_k — целое, то $x_k \leqslant x_k^0 = [(P_k / na_k) - p]$, $k \in Q_0$.

Снова вводим понятие целочисленного плана и плана сверхурочных применительно к ограничениям (4)—(7). Целочисленный план-вектор (размерности, равной числу членов Q_1) — $X = (x_k,\ k \in Q_1)$, компоненты которого удовлетворяют этим ограничениям. Соответственно вводятся понятия: второго оптимального целочисленного плана $X^2 = (x_k^2,\ k \in Q_1)$ как плана, минимизирующего функционал $f_1(X) = \max\limits_{k \in Q_1} x_k$; второго плана сверхурочных $Y^2 = (y_k^2,\ k \in Q_1)$. Снова строим множество $R_2 = \{k / / k \in Q_1;\ y_k^2 + na_k \leqslant M_k,\ \sum\limits_{k' \in Q_1} y_{k'}^2 + \sum\limits_{k' \in R_1^3} y_{k'}^1 + na_k \leqslant M\}$

и если оно не пусто, то, исходя из R_2 и Q_1, строим множества R_2^1, R_2^2, Q_2 и R_2^3 подобно тому, как, исходя из R_1 и Q_0, мы построили R_1^1, R_1^2, Q_1 и R_1^3.

После этого принимаем $x_k^* = x_k^2$, $k \in R_2^3$ и повторяем этот процесс, продолжая его до тех пор, пока не окажется, что R_u — пустое множество; тогда принимаем $x_k^* = x_k^u$, $k \in Q_{u-1}$ и все компоненты главного целочисленного плана X^* определены, т. е. модель построена.

Резюмируя сказанное, заключаем, что экономико-математическая модель нашей задачи (назовем ее задачей T) сводится к иерархии однотипных задач, каждую из которых обозначаем через L_u

Задача L_u:

$$na_k(p + x_k) + y_k = p_k, \quad k \in Q_u, \tag{8}$$

$$y_k \leqslant M_k, \quad k \in Q_u, \quad \sum_{k \in Q_u} y_k + \sum_{e=1}^{u} \sum_{k \in R_e^3} y_k^e \leqslant M, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_k \leqslant x_k^u, \quad k \in Q_u{}^{*)}, \tag{10}$$

* Из неравенства $x_k \leqslant x_k^u \leqslant \dfrac{P_k}{na_k} - p$, $k \in Q_u$ и (8) следует $y_k \geqslant 0$, $k \in Q_u$.

где

$$R_e^3 = Q_{e-1} \setminus Q_e, \quad \sum_{e=1}^{0} \sum_{k \in R_e^3} y_k^e = 0,$$

$$Q_0 = \{1, \ldots, s\}, \quad x_k^0 = \left[\frac{P_k}{na_k} - p \right], \quad k \in Q_0.$$

$X = (x_k, k \in Q_u)$ (Q_u — предполагается упорядоченным по возрастанию k) — целочисленный план. $X^{u+1} = (x_k^{u+1}, k \in Q_u)$ — оптимальный целочисленный план — целочисленный план, минимизирующий функционал

$$f_u(X) = \max_{k \in Q_u} x_k. \tag{11}$$

Y^{u+1} — план сверхурочных — вектор значений y_k^{u+1}, $k \in Q_u$, которые вследствие (8) принимает y_k при $x_k = x_k^{u+1}$, $k \in Q_u$.

Задача T. Решением задачи T называется вектор $X^* = (x_1^*, \ldots, x_s^*)$, определенный следующим образом.

Если множество $R_{u+1} = \Bigl\{k/k \in Q_u, \quad y_k^{u+1} + na_k \leqslant M_k, \quad \sum_{k' \in Q_u} y_k^{u+1} +$

$$+ \sum_{e=1}^{u} \sum_{k' \in R_e^3} y_{k'}^e + na_k \leqslant M \Bigr\} = \varnothing,$$

то

$$x_k^* = \left| \begin{array}{l} x_k^e, \quad k \in R_e^3 \quad (e = 1, \ldots, u), \\ x_k^{u+1}, \quad k \in Q_u \end{array} \right. \tag{12}$$

и на этом шаге иерархия обрывается (L_u — последняя задача иерархии).

Если же R_{u+1} — не пустое множество, то полагаем

$$R_{u+1}^1 = \Bigl\{k/k \in R_{u+1}, \quad x_k^{u+1} = \max_{k' \in R_{u+1}} x_{k_1}^{u+1}\Bigr\} \tag{13}$$

и, обозначая через τ_{u+1} все те подмножества $\tau_{u+1} \subseteq R^1_{u+1}$, для которых имеет место

$$\sum_{k \in Q_u} y_k^{u+1} + \sum_{e=1}^{u} \sum_{k \in R_e^3} y_k^e + n \sum_{k \in \tau_{u+1}} a_k \leqslant M, \tag{14}$$

вводим две функции: $\beta(\tau_{u+1})$ — число членов τ_{u+1} и $\gamma(\tau_{u+1}) = \sum\limits_{k \in \tau_{u+1}} a_k$, а затем определяем τ_{u+1}^1, как те из множеств τ_{u+1}, для которых $\beta(\tau_{u+1}^1) \geqslant \beta(\tau_{u+1})$ и R_{u+1}^2, как то из множеств τ_{u+1}^1, для которого $\gamma(R_{u+1}^2) \leqslant \gamma(\tau_{u+1}^1)$.

После чего полагаем

$$Q_{u+1} = R_{u+1}^2 \cup (R_{u+1} \setminus R_{u+1}^1), \tag{15}$$

т. е. переходим к задаче L_{u+1}.

Если существует последняя задача иерархии, т. е. если T состоит из конечного числа L_u, то модель можно считать построенной, ибо только в этом случае задача T ведет от начальных данных к решению.

Теорема 1. *Задача T состоит не более чем из s задач L_u.*

Доказательство. В силу определения Q_u имеем

$$Q_{u+1} \subseteq Q_u. \tag{16}$$

Если

$$R_{u+1} \neq Q_u, \tag{17}$$

то

$$Q_{u+1} \neq Q_u. \tag{18}$$

Если же (17) не имеет места, то

$$R_{u+1}^2 \neq R_{u+1}^1, \tag{19}$$

ибо в противном случае

$$\sum_{k \in Q_u} y_k^{u+1} + \sum_{e=1}^{u} \sum_{k \in R_e^3} y_k^e + n \sum_{k \in R_{u+1}^1} a_k \leqslant M$$

или

$$\sum_{k \in Q_u \setminus R_{u+1}^1} y_k^{u+1} + \sum_{k \in R_{u+1}^1} (y_k^{u+1} + na_k) + \sum_{e=1}^{u} \sum_{k \in R_e^3} y_k^e \leqslant M$$

и, следовательно, вектор

$$Y_1^{u+1} = (y_k^{u+1}, \quad k \in Q_{u+1} \setminus R_{u+1}^1; \quad y_k^{u+1} + na_k, \quad k \in R_{u+1}^1)$$

является планом сверхурочных, которому в силу (8) соответствует целочисленный план

$$X_1^{u+1} = (x_k^{u+1}, \quad k \in Q_{u+1} \setminus R_{u+1}^1; \quad x_k^{u+1} - 1, \quad k \in R_{u+1}^1)$$

такой, что при $k^1 \in R_{u+1}^1$ имеем

$$f_u(X_1^{u+1}) = x_{k^1}^{u+1} - 1 < x_{k^1}^{u+1} = f_u(X^{u+1}), \tag{20}$$

так как ввиду невыполнения (17)

$$R_{u+1}^1 = \{k/k \in Q_u; \quad x_k^{u+1} = f(X^{u+1})\}.$$

Но (20) противоречит определению X^{u+1}, следовательно, при невыполнении (17) имеет место (19), а из него в силу определения Q_u следует (18); значит последнее всегда имеет место, что вместе с (16) доказывает теорему.

Выразим теперь из (8) y_k через x_k и соответственно y_k^e через x_k^e и подставим эти выражения в (9).

Получим

$$na_k x_k \geqslant \overline{P}_k, \quad k \in Q_u; \quad n \sum_{k \in Q_u} a_k x_k \geqslant P^u, \tag{21}$$

где

$$\overline{P}_k = P_k - na_k p - M_k \ (k = 1, \ldots, s), \tag{22}$$

$$P^u = \sum_{k=1}^{s} (P_k - na_k p) - M - \sum_{e=1}^{u} \sum_{k \in R_e^3} a_k x_k^e. \tag{23}$$

Подставляя эти значения в выражение для R_{u+1} и в соотношения (14), получим

$$R_{u+1} = \left\{k/k \in Q_u; \quad na_k x_k^{u+1} \geqslant \overline{P}_k + na_k; \quad n \sum_{k^1 \in Q_u} a_{k^1} x_{k^1}^{u+1} \geqslant P^u + na_k\right\}, \tag{24}$$

$$n \sum_{k \in Q_u} a_k x_k^{u+1} \geqslant P^u + n \sum_{k \in \tau_{u+1}} a_k. \tag{25}$$

Перейдем к построению алгоритма. Для решения задачи L_u необходимо привлечение определенного аппарата; и этим мы займемся в следующих параграфах. А теперь, предполагая задачу L_u решенной, построим алгоритм решения задачи T. Последний основан на следующем утверждении.

Теорема 2. *Пусть имеем*

$$R_{u+1}^1 = \{k_1, \ldots, k_\mu\}, \tag{26}$$

причем $a_{k_\alpha} \leqslant a_{k_{\alpha+1}}$, *и пусть* α_0 — *натуральное число, определенное следующим образом: если имеет место*

$$n \sum_{k \in Q_u} a_k x_k^{u+1} \geqslant P^u + n \sum_{\alpha=1}^{\mu} a_{k_\alpha}, \tag{27}$$

то полагаем $\alpha_0 = \mu$, *если же* (27) *не выполнено, то* α_0 *определено соотношениями*

$$n \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0+1} a_{k_\alpha} > n \sum_{k \in Q_u} a_k x_k^{u+1} - P^u \geqslant n \sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} a_{k_\alpha}. \tag{28}$$

Тогда

$$R_{u+1}^2 = \{k_1, \ldots, k_{\alpha_0}\}. \tag{29}$$

Доказательство. При выполненном (27) теорема очевидна. Пусть (27) не имеет места. В левой части первого из соотношений (28) стоит сумма $(\alpha_0 + 1)$ слагаемых (самых меньших), и эта сумма не удовлетворяет (25), т. е. ни одно подмножество множества R_{u+1}^1 из $(\alpha_0 + 1)$ элементов не является τ_{u+1}^1. В правой части второго из (28) стоит сумма α_0 слагаемых, удовлетворяющих (25), т. е. существует τ_{u+1}, состоящее из α_0 элементов. Следовательно, α_0 — максимальное число элементов τ_{u+1}, значит, $\beta(\tau_{u+1}^1) = \alpha_0$ и $\tau_{u+1}^1 = \{k_1, \ldots, k_{\alpha_0}\}$.

В то же время сумма

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha_0} a_{k_\alpha} = \sum_{k \in \tau_{u+1}^1} a_k = \gamma(\tau_{u+1}^1)$$

минимальна, так как она состоит из наименьших слагаемых. Значит, (29) выполнено, что требовалось доказать.

Алгоритм решения задачи T. В качестве L_u рассматриваем задачу с ограничениями (21) и (10) и минимизируемым функционалом (11). Вычисляем $\bar{P}_k$, согласно (22), а P^u по очевидным рекуррентным формулам (см. (23))

$$P^u = P^{u-1} - n \sum_{k \in R_u^3} a_k x_k^u, \quad \text{где} \quad P^0 = \sum_{k=1}^{s} (P_k - n a_k p) - M.$$

Пусть Q_u уже найдено, т. е. L_u построена. Находим X^{u+1} и определяем, согласно (24), множество R_{u+1}. Если последнее пусто, то X^* определяется равенствами (12) и вычисления заканчиваются.

Если $R_{u+1} \neq \varnothing$, то, согласно (13), определяем R_{u+1}^1 и располагаем a_k, $k \in R_{u+1}^1$ в порядке возрастания $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_\mu}$, т. е. записываем R_{u+1}^1 в виде (26).

Вычисляем последовательные суммы na_{k_1}, $n(a_{k_1}+a_{k_2}),\ldots$ и сравниваем их с числом $n\sum\limits_{k\in Q_u} a_k x_k^{u+1} - P^u$ до тех пор, пока не получим одно из соотношений (27) или (28), т. е. пока не найдем α_0 (см. теорему 2), после чего R^2_{u+1} определяется по (29).

Затем, согласно (15), определяем Q_{u+1}, т. е. переходим к L_{u+1}. В силу теоремы 1 не более чем через s шагов R_u оказывается пустым множеством, и мы приходим к значению X^*.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ, КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПЛАНА

Обозначим через L* задачу с ограничениями

$$\sum_{k=1}^{s} a_{kj}x_k \geqslant N_j, \quad j=1;\ \ldots;\ l, \tag{30}$$

$$0 \leqslant x_k \leqslant p_k \qquad (k=1,\ldots,s), \tag{31}$$

где $a_{kj}\geqslant 0$, но существует хоть одно такое $k^1 (1\leqslant k^1 \leqslant s)$, что $U_{k^1} = \{j\,/\,a_{k^1j}>0\}\neq\varnothing$ с минимизируемым функционалом $f(X)=\max\limits_k x_k$ и с требованием целочисленности всех переменных **.

Задача L легко сводится к задаче целочисленного линейного программирования и может быть, очевидно, решена одним из алгоритмов Гомори (см., например, [1] — [3]), которые, однако, требуют выполнения неконтролируемого (часто очень большого) числа итераций. Поэтому мы предпочитаем разработать, исходя из специфики задачи, более простую методику ее решения.

С этой целью установим некоторые свойства задачи L.

Теорема 3. *Для существования целочисленного решения задачи L необходимо и достаточно выполнение соотношений:*

$$\sum_{k=1}^{s} a_{kj}p_k \geqslant N_j\,(j=1,\ldots,l),\quad p_k\geqslant 0 \quad (k=1,\ldots,s).$$

Теорема очевидна.

Обозначим $\sigma=\{k\,/\,p_k\geqslant f(X)\}$; $A_j=\{k\,/\,a_{kj}>0\}$.

Теорема 4. *Для того чтобы целочисленный план *** $X^0=(x_1^0,\ldots,x_s^0)$ был оптимальным, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: либо*

$$X^0=0, \tag{32}$$

либо, если существуют такие k, что $x_k^0>0$, то найдется j_0, для которого

$$\sigma\cap A_j\neq\varnothing, \tag{33}$$

$$(f(X^0)-1)\sum_{k\in\sigma} a_{kj_0} + \sum_{k\bar{\in}\sigma} a_{kj_0}p_k < N_{j_0}. \tag{34}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ни одно из указанных условий не имеет места. Значит, ввиду целочисленности

$$f(X^0)\geqslant 1 \tag{35}$$

* Эта задача является, очевидно, обобщением задачи L_u.

** Ввиду целочисленности x_k p_k может быть заменено на $[p_k]$. Поэтому здесь и в дальнейшем p_k предполагаются целыми.

*** Обозначения, используемые здесь и далее, отличаются от обозначений предыдущего раздела.

и не выполнено хоть одно из соотношений (33) и (34). Тогда целочисленный вектор $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_s^1)$, заданный равенствами

$$x_k^1 = \left| \begin{array}{ll} f(X^0) - 1, & k \in \sigma, \\ p_k, & k \overline{\in} \sigma \end{array} \right.$$

является планом, и для него $f(X^1) < f(X^0)$, что противоречит оптимальности X^0, и необходимость доказана.

Достаточность. Оптимальность плана (32) очевидна. Если же имеет место (35) и выполнены (33) и (34), то для любого целочисленного плана $X = (x_1, \ldots, x_s)$ существует индекс $k_0 \in \sigma$ такой, что имеет место

$$x_{k_0} \geqslant f(X^0), \tag{36}$$

так как если $X^1 = (x_1^1, \ldots, x_s^1)$ — целочисленный вектор, для которого $x_k^1 \leqslant f(X^0) - 1$, $k \in \sigma$, то в силу (31) и (34) X^1 не является планом. Из (36) следует $f(X) \geqslant f(X^0)$, и достаточность доказана.

Теорема 5. *Для того чтобы оптимальный целочисленный план был единственным, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий: либо имеет место (32), либо, если (32) не имеет места, то*

а) $x_k^0 = p_k$, $k \overline{\in} \sigma$,

б) каждому $k_0 (1 \leqslant k_0 \leqslant s)$ *соответствует хотя бы одно такое* j_0, *что*

$$\sum_{k=1}^{s} a_{kj_0} x_k^0 - a_{k_0 j_0} < N_{j_0}. \tag{37}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ни одно из указанных условий не выполнено. Значит, имеет место (35) и не выполняется хоть одно из условий *а* и *б*.

Если не выполнено *а*, то, полагая

$$x_k^1 = \left| \begin{array}{ll} f(X^0), & k \in \sigma, \\ p_k, & k \overline{\in} \sigma, \end{array} \right.$$

получаем оптимальный целочисленный план $X^1 \neq X^0$.

Если же *а* имеет место, но не выполнено *б*, т. е. существует k_0 такой, что (37) не выполняется ни для одного j, то, полагая

$$x_k^1 = \left| \begin{array}{ll} x_k^0 - 1, & k = k_0, \\ x_k, & k \neq k_0, \end{array} \right.$$

снова получаем оптимальный целочисленный план $X^1 \neq X^0$, и необходимость доказана.

Достаточность. Если выполнено (32), то X^0 — единственный, так как каждое изменение X_k^0 привело бы к нарушению (31) или оптимальности. Если же (32) не имеет места, но выполнены *а* и *б*, то при $k \overline{\in} \sigma$ x_k^0 не может быть увеличено ввиду (31), а при $k \in \sigma$ — ввиду того, что полученный план не будет оптимальным. Одновременно уменьшение хоть на единицу любой из компонент X^0 в силу (37) приведет к тому, что полученный вектор не будет планом. Достаточность доказана.

4. АЛГОРИТМЫ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ L

Прежде всего отметим, что если

$$N_j \leqslant 0 \quad (j = 1; \ldots; l); \quad p_k \geqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, s), \tag{38}$$

то $X^0 = 0$ является планом, а значит — оптимальным планом.

Пусть, однако, (38) не выполнено. Для этого случая * мы опишем два алгоритма решения задачи L, основанные на теореме 4.

* Практический интерес представляет именно этот случай.

1. Пусть числа p_k расположены в порядке убывания, а индексы $k_1, k_2, \ldots, k_\nu = s$ таковы, что $p_{k_e} > p_{k_{e+1}}$, $p_k = p_{k_e}, k_{e-1} < k \leqslant k_e$, $k_0 = 0$ $(e = 1, \ldots, \nu)$.

Определим последовательность векторов $X^e = (x_1^e, \ldots, x_k^e)$ равенствами

$$x_k^e = \left| \begin{array}{l} p_{k_e},\ k \leqslant k_e, \\ p_k,\ k > k_e. \end{array} \right.$$

Подставляем последовательно компоненты векторов X^e в ограничения (30).

Возможны три случая: *а*) X^1 не является планом; *б*) существует индекс $e_0 (1 \leqslant e_0 < \nu)$ такой, что X^{e_0} является планом, но X^{e_0+1} не является планом; *в*) X^ν является планом.

В случае *а* задача L не имеет решения (см. теорему 3). В случае *б*, полагая

$$Q = \left\{ j \ / \sum_{k=1}^{s} a_{kj} x_k^{e_0+1} < N_j \right\}, \tag{39}$$

получим

$$\sum_{k=1}^{k_{e_0}} a_{ki} > 0, \quad j \in Q, \tag{40}$$

ибо если для некоторого $j_0 \in Q$ мы имели $a_{kj_0} = 0$ при $k \leqslant k_{e_0}$ то, так как $x_k^{e_0+1} = x_k^{e_0}$ при $k > k_{e_0}$, получили бы $\sum_{k=1}^{s} a_{kj_0} x_k^{e_0+1} = \sum_{k=1}^{s} a_{kj_0} x_k^{e_0} \geqslant N_{j_0}$, т. е. $j_0 \overline{\in} Q$.

Вычисляем

$$h = \min_{j \in Q} \left[\left(\sum_{k=1}^{s} a_{kj} x_k^{e_0} - N_j \right) \Big/ \sum_{k=1}^{k_{e_0}} a_{kj} \right] \tag{41}$$

и определяем вектор $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_k^0)$ равенствами

$$x_k^0 = \left| \begin{array}{l} x_k^{e_0} - h,\ \ k \leqslant k_{e_0} \\ \quad p_k. \quad\ k \leqslant k_{e_0} \end{array} \right. \tag{42}$$

Наконец, в случае *в*, принимая в качестве Q не пустое множество тех j, для которых $A_j \neq \varnothing$, и считая $e_0 = \nu$, снова находим h (согласно (41)) и определяем X^0 равенствами (42).

В силу (42) имеем

$$\sigma = \{1, \ldots, k_{e_0}\}. \tag{43}$$

В силу (39) и (41) X^0 является планом. Из (41) следует существование такого $j_0 \in Q$, что

$$h + 1 > \left(\sum_{k=1}^{s} a_{kj_0} x_k^{e_0} - N_{j_0} \right) \Big/ \sum_{k=1}^{k_{e_0}} a_{kj_0}. \tag{44}$$

Из (40) и (43) следует (33), а из (43) и (44) — (34), т. е. X^0 — оптимальный целочисленный план.

2. Введем обозначения $R = \{k \,/\, U_k \neq \varnothing\} = \varnothing$

$$b_k = \max\left(0; \max_{j \in U_k} \frac{N_j - \sum\limits_{k' \neq k} a_{k'j} p_{k'}}{a_{kj}}\right), \quad k \in R.$$

Если хотя бы для одного $k \in R$

$$b_k > p_k, \tag{45}$$

то в силу теоремы 3 задача L не имеет решения. Если же (45) не имеет места, то полагаем $c_0 = \max\limits_{k \in R} b_k$ и, принимая c_e, $e \geqslant 0$ известным, строим множества

$$\sigma_e = \{k \,/\, p_k \geqslant c_e\},$$

$$Q_e = \left\{ j/c_e \sum_{k \in \sigma_e} a_{kj} + \sum_{k \bar{\in} \sigma_e} a_{kj} p_k < N_j \right\}.$$

Если

$$Q_e = \varnothing \tag{46}$$

и существует хотя бы одно $j_0 \in Q_e$, для которого

$$\sigma_e \cdot A_{j_0} = \varnothing, \tag{47}$$

то ввиду теоремы 3 задача не имеет решения. Если же (47) не выполнено, то вычисляем

$$c_{e+1} = \max_{j \in Q_e} \left(N_j - \sum_{k \bar{\in} \sigma_e} a_{kj} p_k \right) \Big/ \sum_{k \in \sigma_e} a_{kj}.$$

Если (46) не имеет места для Q_e, но выполнено для Q_{e-1}, то определяем вектор X^0 равенствами

$$x_k^0 = \left| \begin{array}{ll} -[-c_e], & k \in \sigma_e, \\ p_k, & k \bar{\in} \sigma_e. \end{array} \right. \tag{48}$$

Покажем, что X^0 — оптимальный целочисленный план.

Так как $x_k{}^0 = -[-c_e] \geqslant c_e$, $k \in \sigma_e$ и Q_e — пустое множество, то для всех $j = 1, \ldots, l$ имеем

$$\sum_{k=1}^{s} a_{kj} x_k^0 \geqslant c_e \sum_{k \in \sigma_e} a_{kj} + \sum_{k \bar{\in} \sigma} a_{kj} p_k \geqslant N_j,$$

что равносильно (30). Из определения σ_e и (48) следует (31), т. е. X^0 является планом.

Пусть $e = 0$. Ни одно значение x_k, удовлетворяющее (30) и (31), не может быть меньше c_0, и так как x_k — целое, то необходимо $f(X) \geqslant x_k \geqslant -[-c_0]$, но $f(X^0) = -[-c_0]$, значит, X^0 оптимально.

Пусть теперь $e \geqslant 1$, Q_e — пустое множество, но Q_{e-1} — не пустое.

Из определения c_e следует существование хотя бы одного $j_0 \in Q_{e-1}$, для которого

$$c_e = \left(N_{j_0} - \sum_{k \bar{\in} \sigma_{e-1}} a_{kj_0} p_k \right) \Big/ \sum_{k \in \sigma_{e-1}} a_{kj_0}. \tag{49}$$

Покажем, что для этого j_0

$$\sigma_e \cap A_{j_0} = \sigma_{e-1} \cap A_{j_0}. \tag{50}$$

Действительно, с одной стороны $c_e > c_{e-1}$ и, значит, $\sigma_e \subseteq \sigma_{e-1}$. С другой стороны, если положить $(\sigma_{e-1} \setminus \sigma_e) \cap A_{j_0} \neq \varnothing$, то, учитывая неравенства

$c_e > p_k$, $k \in \sigma_{e-1} \setminus \sigma_e = \sigma_e^1$, будем иметь

$$\sum_{k \in \sigma_e^1} a_{kj}(c_e - p) > 0.$$

Отсюда в силу (49) получим

$$c_e \sum_{k \in \sigma_e} a_{kj_0} + \sum_{k \in \bar{\sigma}_e} a_{kj_0} p_k = c_e \sum_{k \in \sigma_{e-1}} a_{kj_0} + \sum_{k \in \bar{\sigma}_{e-1}} a_{kj_0} p_k - \\ - \sum_{k \in \sigma_e'} a_{kj_0}(c_e - p_k) < N_{j_0},$$

т. е. $j_0 \in Q_e$, что невозможно, так как Q_e — пустое множество; значит, (50) доказано.

Число c_e мы вычислили при предположении, что задача имеет решение, т. е. когда $\sigma_{e-1} \cap A_j \neq \varnothing$, $j \in Q_{e-1}$. Следовательно, в силу (50) имеем $\sigma \cap A_{j_0} = \sigma_e \cap A_{j_0} = \varnothing$, а ввиду (48)—(50) получим

$$(f(X^0) - 1) \sum_{k \in \sigma} a_{kj_0} + \sum_{k \in \bar{\sigma}} a_{kj_0} p_k = -([-c_e] + 1) \sum_{k \in \sigma_e} a_{kj_0} + \\ + \sum_{k \in \bar{\sigma}_e} a_{kj_0} p_k < c_e \sum_{k \in \sigma_{e-1}} a_{kj_0} + \sum_{k \in \bar{\sigma}_{e-1}} a_{kj_0} p_k = N_{j_0},$$

т. е. для j_0 имеют место (33) и (34) и $X^0 = (x_1^0, \ldots, x_s^0)$ — оптимальный целочисленный план.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Gomory. Outline of an Algorihm for Integer Solution to Linear Programs. Bull. Amer. Math. Soc., 1958, vol. 64, No. 5.
2. R. E. Comary, W. J. Baumol. Integer Programming and Pricing. Econometrica, 1960, vol. 28, No. 3 (Русск. пер. в сб. Численные методы оптимального планирования, Изд-во АН СССР, 1962).
3. С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1964.

Поступила в редакцию
12 II 1965