

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ МЕТОДА БРАУНА РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

В. В. АМВРОСЕНКО
(ЖАЛИНИН)

В настоящей статье рассматривается модификация метода Брауна, существенно ускоряющая итеративный процесс.

Матричная игра Γ определяется матрицей вида

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}.$$

Решением матричной игры Γ называется такая пара смешанных стратегий $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, и действительное число v , что

$$\sum_{i=1}^m p_i a_{ij} \geq v \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

и

$$\sum_{j=1}^n q_j a_{ij} \leq v \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Для приближенного решения этой задачи можно воспользоваться методом Брауна (см., например [1]). В статье предлагаются приемы, позволяющие сократить число итераций для достижения заданной точности решения.

Предварительно введем некоторые обозначения.

Обозначим сумму строк матрицы на i -й итерации, получаемую при использовании метода Брауна для решения игровой матрицы $A (m \times n)$:

$$\{\underline{s}^{(i)}\} = (\underline{s}_1^{(i)}, \underline{s}_2^{(i)}, \dots, \underline{s}_n^{(i)}),$$

сумму столбцов

$$\{\bar{s}^{(i)}\} = (\bar{s}_1^{(i)}, \bar{s}_2^{(i)}, \dots, \bar{s}_m^{(i)}),$$

частоты применения игроком P своих стратегий

$$\{p_k^{(i)}\} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_m^{(i)}),$$

игроком Q

$$\{q_k^{(i)}\} = (q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \dots, q_n^{(i)}),$$

т. е. количество применений игроком P k -й стратегии до i -й итерации включительно равно $i \cdot p_k^{(i)}$, игроком Q — $i \cdot q_k^{(i)}$.

Обозначим также

$$\frac{\underline{s}_k^{(i)}}{i} = a_k^{(i)}, \quad \frac{\bar{s}_k^{(i)}}{i} = b_k^{(i)}.$$

Таким образом, нижняя цена игры на i -й итерации равна минимальному элементу строки $\{a_k^{(i)}\} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_n^{(i)})$, а верхняя — максимальному элементу строки $\{b_k^{(i)}\} = (b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \dots, b_m^{(i)})$, т. е. $\underline{v}^{(i)} = \min_k \{a_k^{(i)}\}$, $\bar{v}^{(i)} = \max_k \{b_k^{(i)}\}$.

Обычно итерационный процесс заканчивают на первой же итерации t , для которой

$$\bar{v}^{(t)} - \underline{v}^{(t)} \leq \varepsilon, \quad (1)$$

где ε — заранее заданное число.

Рассмотрим первый, довольно тривиальный прием сокращения числа итераций, заключающийся в том, что процесс решения заканчивается на первой же итерации, для которой выполняется неравенство

$$\min_{s, k} (\bar{v}^{(s)} - \underline{v}^{(k)}) \leq \varepsilon \quad \text{для } k, s = 1, 2, \dots, t. \quad (2)$$

При машинной реализации этого приема необходимо на каждой $(i+1)$ -й итерации иметь максимальное значение $\bar{v}^{[i]}$ нижних сумм $\underline{v}^{(i)}$ за все предыдущие i итераций и соответствующий ей набор $\{p_k^{[i]}\}$ и минимальное значение $\bar{v}^{[i]}$ и соответствующий набор $\{q_k^{[i]}\}$.

Получаемое на $(i+1)$ -й итерации значение $\underline{v}^{(i+1)}$ сравнивать с $\underline{v}^{[i]}$

$$\underline{v}^{(i+1)} > \underline{v}^{[i]}, \quad (3)$$

и при выполнении неравенства (3) положить

$$\underline{v}^{[i+1]} = \underline{v}^{(i+1)}, \quad \{p_k^{[i+1]}\} = \{p_k^{(i+1)}\},$$

а при невыполнении неравенства (3) оставить

$$\underline{v}^{[i+1]} = \underline{v}^{[i]}, \quad \{p_k^{[i+1]}\} = \{p_k^{[i]}\}.$$

Аналогично поступать с $\bar{v}^{[i]}$, $\{q_k^{[i]}\}$, $\bar{v}^{(i+1)}$, $\{q_k^{(i+1)}\}$ при выполнении неравенства $\bar{v}^{(i+1)} < \bar{v}^{[i]}$.

Предлагаемый прием не будет удлинять итерационный процесс, так как (1) является частным случаем (2), а будет, как правило, его сокращать. Для нескольких исследованных в этом отношении матриц было установлено сокращение количества итераций приблизительно в три раза.

Более существенное влияние на сокращение длительности итерационного процесса решения игровой матрицы оказывает следующий прием.

В обычном итерационном процессе часто оба игрока одновременно применяют некоторое число l ($l > 1$) раз подряд одни и те же стратегии, т. е. l раз подряд к строке $\{s_k^{(i)}\}$ прибавляется некоторая i' -я строка матрицы A (сохраняется номер i' максимального элемента в строках $\{s_k^{(i)}\}$, $\{s_k^{(i+1)}\}$, $\dots$, $\{s_k^{(i+l-1)}\}$) и к строке $\{s_k^{(i)}\}$ — некоторый j' -й столбец исходной матрицы A (сохраняется номер j' минимального элемента в строках $\{s_k^{(i)}\}$, $\{s_k^{(i+1)}\}$, $\dots$, $\{s_k^{(i+l-1)}\}$).

Предлагается в каждой итерации определять число l одновременных повторений игроками одних и тех же ходов и прибавлять к строке $\{s_k^{(i)}\}$ умноженный на l соответствующий j' -й столбец и к строке $\{s_k^{(i)}\}$ — умноженную на l соответствующую i' -ю строку матрицы A и соответствующим образом изменять $\{p_k^{(i)}\}$ и $\{q_k^{(i)}\}$ (с учетом l -разового применения стратегий). Тогда в каждой итерации хотя бы один из игроков будет применять стратегию, отличную от применяемой в предыдущей итерации.

Алгоритм указанного приема следующий.

Выходными данными к $(i+1)$ -й итерации являются $\{\underline{s}_k^{(i)}\}$, $\{\bar{s}_k^{(i)}\}$, $\{\alpha_k^{(i)}\}$, $\{\beta_k^{(i)}\}$ и исходная игровая матрица $A = \{a_{ij}\}$.

Совокупности $\{\alpha_k^{(i)}\}$ и $\{\beta_k^{(i)}\}$ определяют смешанные стратегии игроков P и Q за i итераций:

$$p_k^{(i)} = \alpha_k^{(i)} / \sum_{k=1}^m \alpha_k^{(i)}, \quad q_k^{(i)} = \beta_k^{(i)} / \sum_{k=1}^n \beta_k^{(i)}.$$

На $(i+1)$ -й итерации определяются

$$a_k^{(i+1)} = \underline{v}^{(i+1)} = \min_k \{a_k^{(i)}\} = \frac{1}{c_i} \min_k \{\underline{s}_k^{(i)}\}, \quad (4)$$

$$b_{k''}^{(i+1)} = \bar{v}^{(i+1)} = \max_k \{b_k^{(i)}\} = \frac{1}{c_i} \max_k \{\bar{s}_k^{(i)}\}, \quad (5)$$

Последовательно определяются $n_j''(i+1)$ и $n_j'(i+1)$:

$$n_j''(i+1) = \begin{cases} E \left(\frac{\bar{s}_{k''}^{(i)} - \bar{s}_j^{(i)}}{a_{j,k'} - a_{k'',k'}} + 1 \right) & \text{для } a_{j,k'} > a_{k'',k'}, \\ \infty & \text{для } a_{j,k'} \leq a_{k'',k'}, \end{cases} \quad (6)$$

$$n_j'(i+1) = \begin{cases} E \left(\frac{\underline{s}_j^{(i)} - \underline{s}_{k'}^{(i)}}{a_{k'',k'} - a_{k'',j}} + 1 \right) & \text{для } a_{k'',k'} > a_{k'',j}, \\ \infty & \text{для } a_{k'',k'} \leq a_{k'',j}. \end{cases} \quad (7)$$

Затем выбирается

$$n(i+1) = \min [n'(i+1), n''(i+1)]; \quad (8)$$

где

$$n'(i+1) = \min_j \{n_j'(i+1)\}, \quad n''(i+1) = \min_j \{n_j''(i+1)\}. \quad (9)$$

Формируются

$$\begin{aligned} \underline{s}_j^{(i+1)} &= \underline{s}_j^{(i)} + n(i+1) \cdot a_{k'',j} & (j = 1, 2, \dots, n), \\ \bar{s}_j^{(i+1)} &= \bar{s}_j^{(i)} + n(i+1) \cdot a_{j,k'} & (j = 1, 2, \dots, m), \\ \alpha_k^{(i+1)} &= \alpha_k^{(i)} & \text{для } k \neq k'', \\ \alpha_{k''}^{(i+1)} &= \alpha_{k''}^{(i)} + n(i+1), \\ \beta_k^{(i+1)} &= \beta_k^{(i)} & \text{для } k \neq k', \\ \beta_{k'}^{(i+1)} &= \beta_{k'}^{(i)} + n(i+1). \end{aligned} \quad (10)$$

Определяются нижняя и верхняя цены игры:

$$\underline{v}^{(i+1)} = \frac{\min_j \{\underline{s}_j^{(i+1)}\}}{\sum_{k=1}^m \alpha_k^{(i+1)}}, \quad \bar{v}^{(i+1)} = \frac{\max_j \{\bar{s}_j^{(i+1)}\}}{\sum_{k=1}^n \beta_k^{(i+1)}}. \quad (11)$$

Затем проверяется неравенство (1), и в случае его невыполнения переходят к следующей, $(i+2)$ -й итерации.

Как известно (см., например, [2]) точность ϵ решения матричной игры методом Брауна в зависимости от количества итераций N может быть оценена следующим образом:

$$\epsilon \leq c / \sqrt[n+m-2]{N}, \quad (12)$$

где m, n — размеры матрицы, c — постоянная, зависящая от размеров и вида матрицы.

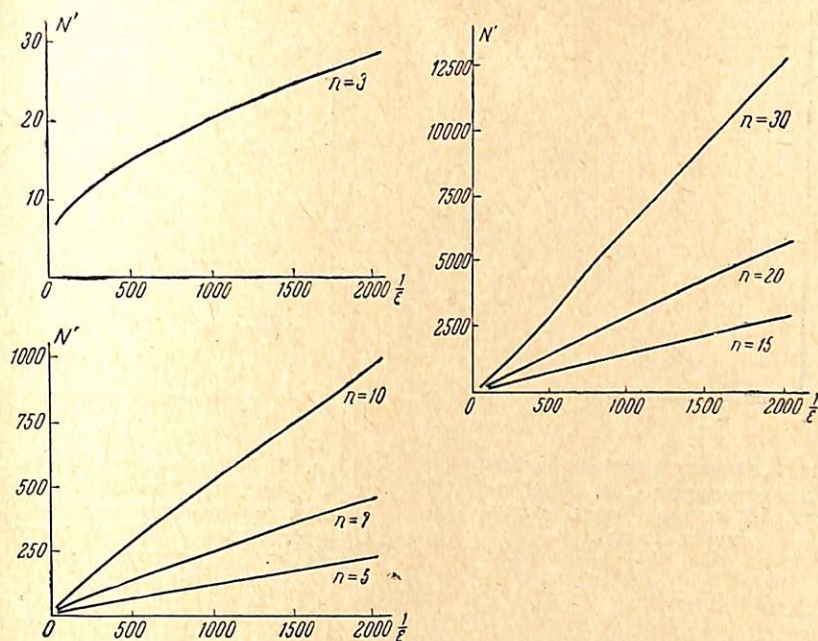


Рис. 1. Сходимость метода Брауна решения матричных итр при применении указанных в статье приемов ее ускорения

Следует отметить, что теоретическая оценка (12) является предельной; на практике сходимость метода Брауна существенно лучше.

Имеются определенные предпосылки того, что оценка сходимости в зависимости от количества итераций N' итерационного процесса с использованием указанных приемов сокращения числа итераций представляется зависимостью

$$\epsilon \leq c' / N'. \quad (13)$$

При этом не следует упускать из вида, что трудоемкость каждой итерации несколько выше, чем в методе Брауна.

На рис. 1—5 представлены некоторые результаты машинных экспериментов для квадратных ($m = n$) матриц, элементы которых — случайные числа, равномерно распределенные в интервале (0,1). Все графики построены для итерационных процессов с применением указанного в статье первого приема.

На рис. 1, 2, 5 не отмечены точки, по которым построены графики, ввиду того, что они практически совпадают с кривыми. На рис. 3 точки нанесены, а на рис. 4 пунктирными линиями показаны пределы, в которых они находятся.

Графики на рис. 1—3, 5 построены усреднением по десяти матрицам для каждого значения n , за исключением точки $n = 40$ на рис. 2, 3, для которой исследовалась лишь одна матрица. Для этой же матрицы построены графики на рис. 4.

Как видно из рис. 1, сходимость итерационного процесса с применением указанных приемов сокращения количества итераций согласуется с оценкой (13).

Близкая к зависимости

$$c' = 0,003(n)^{2,26} \quad (14)$$

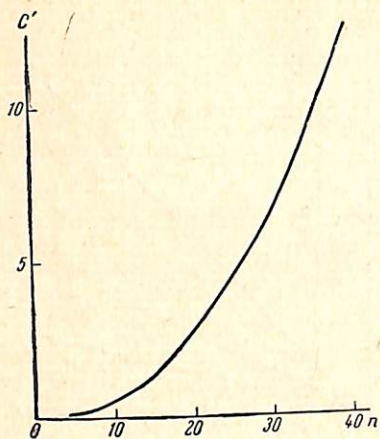


Рис. 2. Оценка среднего значения постоянной c' в неравенстве (13) в зависимости от размеров матриц

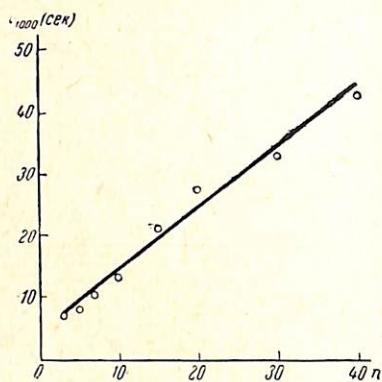


Рис. 3. Оценка времени t_{1000} выполнения $N' = 1000$ итераций в зависимости от размеров матриц для ЭЦВМ с быстродействием 20 тыс. операций в секунду

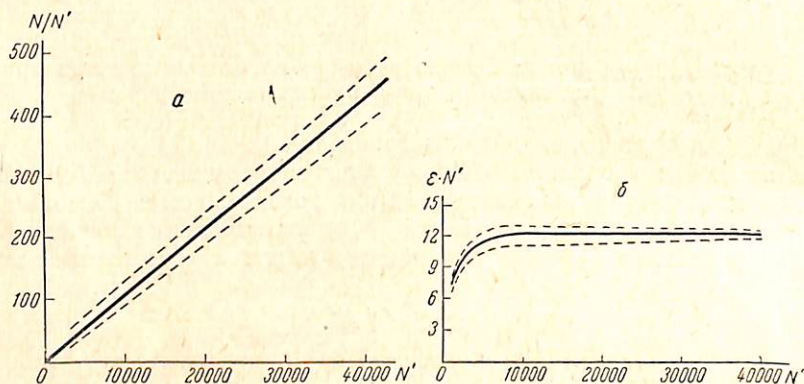


Рис. 4. Оценка для матрицы размером 40×40 сходимости (б) метода Брауна с применением изложенных в статье приемов и сравнение с прямым методом Брауна (а). N — количество итераций прямого метода Брауна

оценка значения c' для различных n , полученная на рис. 1, представлена на рис. 2.

На рис. 5 представлены результаты исследования сходимости метода Брауна с последовательным выбором стратегии для тех же матриц, по которым построены графики на рис. 1. M — количество итераций. Интервалы точности, на которых построены графики рис. 5, взяты меньшими по сравнению с рис. 1 ввиду существенного возрастания машинного времени решения с увеличением точности решения. Как видно из рис. 5, сходимость метода Брауна с последовательным выбором стратегий слабее оценки (13). Действительно, при увеличении точности решения в два раза с $\epsilon = 1/125$ до $\epsilon = 1/250$ для матриц размером 7×7 , 10×10 , 15×15 , 20×20 , 30×30 необходимо итераций соответственно в 2,6; 2,7; 2,8; 3,0; 3,3 раза больше. Кроме того, во всем интервале точности и для матриц

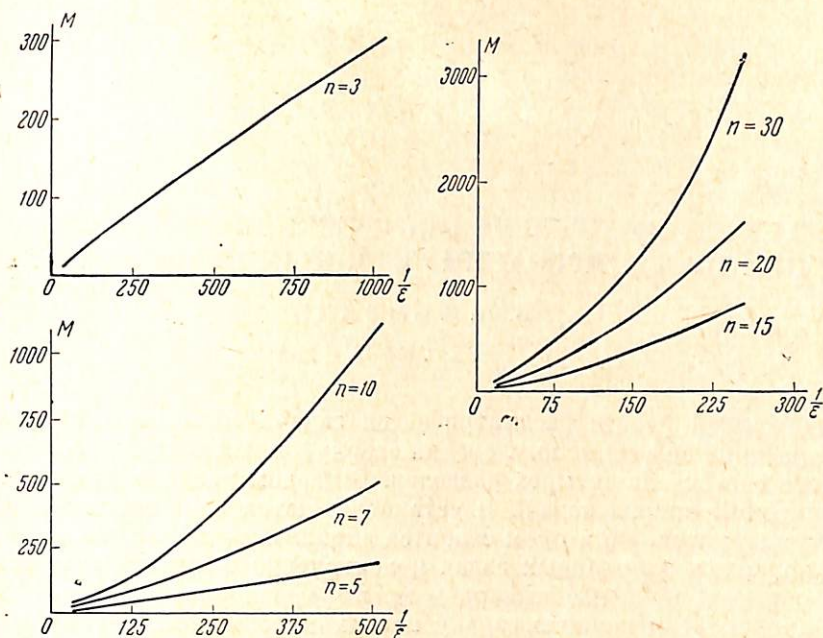


Рис. 5. Сходимость метода Брауна с последовательным выбором стратегий

всех размеров соответствующее значение M больше N' . Например, для матрицы 10×10 и $\varepsilon = 1/500$ $M \approx 1080$, а $N' \approx 290$.

На рис. 4 представлены результаты исследования одной игры с матрицей 40×40 . Рис. 4, а показывает увеличение количества итераций метода Брауна по сравнению с количеством итераций ускоренного метода Брауна для достижения одинаковой точности. Например, для достижения точности решения, которую обеспечивают 42 тыс. итераций ускоренного метода, необходимо в $N/N' = 450$ раз больше итераций метода Брауна. Из рис. 4, б видно, что предельное значение $\varepsilon N'$ равно 13, т. е. для данной матрицы в (13) можно положить $c' \approx 13$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Мак-Кинси. Введение в теорию игр. М., Физматгиз, 1960.
2. Х. Шапиро. Об одном вычислительном методе теории игр. В сб. Матричные игры. М., Физматгиз, 1961.

Поступила в редакцию
30 IV 1965